TRABAJO DE MATEMATICAS PARA LOS ALUMNOS CON LAS MATEMÁTICAS PENDIENTES DE 1º DE BACHILLERATO DE CIENCIAS.

BLOQUE 1.

ARITMÉTICA, ALGEBRA, TRIGONOMETRÍA Y GEOMETRÍA.

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA:

Números reales

- El conjunto de los números reales. Conjuntos de la recta real.
- Operaciones con números reales. Potencias y radicales.
- Logaritmos: definición y propiedades.

Expresiones algebraicas

- Polinomios.
- Fracciones algebraicas.

Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

- Ecuaciones polinómicas, racionales, irracionales.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Sistemas de ecuaciones lineales. Método de Gauss.
- Sistemas de ecuaciones no lineales.
- Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas.
- Planteamiento y resolución de problemas de la vida cotidiana mediante ecuaciones y sistemas de ecuaciones.

Inecuaciones.

- Inecuaciones polinómicas y racionales.
- Sistemas de inecuaciones con una incógnita.

TRIGONOMETRÍA:

- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
- Relaciones fundamentales entre razones trigonométricas del mismo ángulo.
- Razones trigonométricas de la suma, diferencia, ángulo doble y ángulo mitad.
- Transformación de suma de dos razones trigonométricas en productos.
- Resolución de ecuaciones trigonométricas.
- Teorema del seno y teorema del coseno.
- Resolución de problemas del mundo natural geométricos en los que intervengan triángulos.

GEOMETRÍA

Vectores en el plano

- Vectores fijos y vectores libres.
- Operaciones con vectores libres geométricamente.
- Dependencia e independencia lineal de vectores. Bases y coordenadas de un vector libre respecto a una base.
- Operaciones con vectores analíticamente.
- Condición de paralelismo de vectores, gráfica y analíticamente.
- Producto escalar. Propiedades.
- Expresión analítica del producto escalar en una base ortonormal.
- Aplicaciones del producto escalar: Cálculo del módulo de un vector. Calculo del ángulo de dos vectores. Obtener el vector perpendicular a uno dado. Determinar perpendicularidad de vectores.

Geometría analítica en el plano

- Sistema de referencia.
- Coordenadas de un punto. Coordenadas del punto medio de un segmento.
- Ecuaciones de la recta: vectorial, paramétrica, continua, implícita o general y explicita.
- Determinación de una recta.
- Posiciones relativas de dos rectas.
- Ángulo de dos rectas.
- Distancias en el plano: entre puntos, de punto a recta y entre rectas paralelas.
- Mediatriz de un segmento.
- Punto simétrico respecto de un punto y respecto de una recta.
- Área y perímetro de un triángulo.
- Cuadriláteros. Problemas relativos a cuadrados, rectángulos rombos y romboides

ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA

Números reales.

1. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

$$\frac{1}{8}\,;\ \frac{\pi}{2};\ \sqrt{5};\ \ 2{,}6;\ \ 0\,;\ 2+\sqrt{3};\ -3;\ 6{,}444\ldots.;\ \sqrt[3]{-64};\ \ \ 2{,}12{,}13141{,}5\ldots.$$

Sol: Q,I,I,Q,Q,I,Q,Q,Q,I.

2. Escribe en forma de intervalo las siguientes desigualdades:

a) $2 \leq x \leq 5$
b) $x > -3$
c) $x \leq 5$
d) $|x| \leq 2$
e) $|x-3| < 4$
f) $|x+1| < 2{,}5$

Sol: a) [2,5], b) (-3, ∞), c) (-∞,5], d) [-2,2], e) (-1,7), f) (-3,5, 1,5).

Potencias

3. Simplifica utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\left(\frac{xy^2}{x^{-1}y}\right)^2 \cdot (x^2)^3 =$

b) $\frac{18^{-2}\cdot 8^4}{(2^2\cdot 3^{-2})^4}=$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{4}{9}\right)^{-4}\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]^{-1}=$

Sol: a)x^4y^8 b)$2^2\cdot 3^4$ c) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$

4. Opera y simplifica:

a) $\frac{(1+2^{-1})^{-3}}{(4^{-2}+2^{-1})^{-2}}$

b) $\left(\frac{1}{3}-2\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\cdot(1-3^{-2})^{-1}$

c) $1+10\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)^{-1}-4^{-\frac{1}{2}}$

d) $\left(\frac{1}{4}-1\right)^{-2}-3^{-1}\left(\frac{4}{5}-1\right)^{-1}$

Sol: a) $\frac{3}{32}$ b) $\frac{1269}{400}$ c) $\frac{25}{2}$ d)$\frac{31}{9}$

Radicales

5. Realiza las siguientes operaciones con radicales y simplifica:

a) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}} =$

b) $\sqrt{2\sqrt{2}\sqrt{2\sqrt{2}}} =$

c) $\frac{\sqrt{8}\sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{64}} =$

d) $\left(3\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 =$

e) $\frac{\sqrt[3]{a^2}\ \left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\sqrt[3]{a}\ \sqrt{a^3}} =$

f) $\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\cdot\left(5-\sqrt{21}\right) =$

g) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6-3\sqrt{3}} =$

h) $\frac{\sqrt[3]{\sqrt{x}}\cdot\sqrt{\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{\sqrt{x}}} =$

i) $\frac{\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[5]{a^3}\right)^3}{a\sqrt[10]{a}}=$

j) $\frac{\left(3+3\sqrt{12}-\sqrt{75}\right)^2}{6\sqrt{3}} =$

k) $\sqrt{6+\sqrt{5+\sqrt{16}}} =$

l) $\sqrt{3a^2+\sqrt{6a^4-\sqrt{25a^8}}} =$

m) $\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$

n) $2\sqrt[3]{a^6b}-3a^2\sqrt[3]{64b}+5a\sqrt[3]{a^3b}+a^2\sqrt[3]{125b}=$

o) $\sqrt{8ab}+\sqrt{72ab}+\sqrt{50ab}-\sqrt{288ab}=$

Sol: a)$\sqrt[8]{3^7}$ b)$2\sqrt[8]{2}$ c)$\sqrt[3]{4}$ d)$39+6\sqrt{6}$ e)$a^4\cdot\sqrt[3]{a}$ f)158 g)3 h)$\sqrt[24]{x}$ i)$a\sqrt[10]{a^3}$ j)$6\sqrt{3}-9$ k)3 l)2a m)$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ n)$24a^2\sqrt[3]{b}$ o)$\sqrt{2ab}$

6. Calcula y simplifica, racionalizando previamente:

a) $\frac{3}{2\sqrt{5}}+\frac{2}{3-\sqrt{5}}=$

b) $\frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}-\frac{3}{2\sqrt{6}}=$

c) $\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\frac{9}{\sqrt{3}}=$

d) $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$

e) $\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=$

f) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}-\frac{3}{3+\sqrt{6}}-\frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=$

g) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=$

h) $\frac{3\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}-\frac{4\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}=$

Sol: a) $\frac{3}{2}+\frac{4}{5}\sqrt{5}$ b) $5-\frac{9}{4}\sqrt{6}$ c) 2 d) $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ e)$-10\sqrt{35}$ f) -1 g) $\frac{a+b}{a-b}$ h)$-1-\sqrt{15}+2\sqrt{5}$.

Logaritmos.

8. Utilizando la definición de logaritmo, hallar el valor de x en cada una de las siguientes igualdades:

a) $log_2 8=x$

b) $log_3 x=-2$

c) $\ln x=2$

d) $log_x 81=2$

e) $log_3 log_3 3=x$

f) $log_x 25=-1$

Sol: a) 3 b)1/9 c)e^2 d) 9 e) 0 f) 1/25

9. Calcula el valor de las siguientes expresiones utilizando las propiedades de los logaritmos:

a) $log_6\frac{1}{36}$

b) $log_3\sqrt[4]{27}$

c) $log\frac{\sqrt{10}}{0,1}$

d) $\log\sqrt{20}+\log\sqrt{5}$

e) $log_3\frac{1}{3\sqrt[4]{27}}$

f) $log_3^2 8$

Sol: a) -2 b) ¾ c) -1/2 d) 1 e) -7/4 f)16

10. Justifica las siguientes igualdades utilizando las propiedades de los logaritmos:

a) $\frac{\log 6+\log 2}{\log 9+\log 8-\log 6}=1$

b) $\log 125=3(1-log2)$

c) $\frac{\log 6+\log 3-log2}{\log 9-\log 3}=2$

d) $10^{-2\log 2}=\frac{1}{4}$

e) $\frac{1+\log 8}{\log 5+2\log 4}=1$

11. Utilizando las propiedades del logaritmo, desarrollar al máximo las expresiones siguientes:

a) $\log(2x)^3$

b) $\log\frac{xyz}{pq}$

c) $\ln\frac{\sqrt[3]{a^5}\cdot b^4}{c^2\cdot d}$

d) $log\sqrt{\frac{x^3y^2}{z^4}}$

Sol: a) 3log 2+3log x b) log x+ log y+ log z-log p-log q c) $\frac{5}{3}$ log a+4log b-2log c-log d
d) $\frac{3\log x+2\log y-4\log 4}{2}$

12. Elimina logaritmos de las siguientes expresiones:

a) $logC = 2log7 - 3logx - \frac{4}{5}logy + \frac{1}{2}logz$

b) $logD = 3log2 - \frac{1}{2}logx + \frac{3}{4}logy - 5logz$

Sol: a) $C = \frac{49\sqrt{z}}{x^3 \cdot \sqrt[5]{y^4}}$ b) $D = \frac{8\sqrt[4]{y^3}}{\sqrt{x}\cdot z^5}$

Expresiones algebraicas.

13. Halla un polinomio de segundo grado, sabiendo que el coeficiente del término de mayor grado es 2 y es divisible por $x+2$ y por $x-4$.

Sol: P(x)=2x^2-4x-16

14. Determina el valor de k para que $P(x)=x^3+3x+k$ sea divisible por $x-1$

Sol: k=-4

15. Factoriza los siguientes polinomios y halla sus raíces:

a) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - 3x$

b) $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$

c) $P(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$

d) $P(x) = 2x^4 - x^3 + 6x^2 - 7x$

Sol: a) 0, ½ , 3 b) 1 doble, -3 c) 2,3, ±1 d) 0,1

16. Opera y simplifica:

a) $\left[\left(\frac{4}{x}+\frac{1}{x+1}\right):\left(x-\frac{1}{x+1}\right)\right]\cdot x =$

b) $\left(\frac{x+y}{x-y}-\frac{x-y}{x+y}\right)\left(\frac{x}{y}-\frac{y}{x}\right) =$

c) $\left(\frac{3}{x+1}-\frac{2}{x^2-1}+\frac{x}{x-1}\right):\left(1+\frac{10}{x-5}\right) =$

d) $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab} =$

e) $\frac{2x+6}{x^2-3x}-\frac{x+5}{x^2-4x+3}+\frac{x-1}{2x+6}$

f) $\frac{1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2}{1-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2}$

Sol: a) 3x+2 b) $\frac{4y}{x+y}$ c) $\frac{x-5}{x+1}$ d) $-\frac{2}{a+b}$ e) $\frac{x^3-x-12}{2x^3-8x^2+6x}$ f) $\frac{a^2+b^2}{2ab}$

17. Calcula m y n para que se cumpla: $\frac{3x+2}{(x+2)(x-1)} = \frac{m}{x+2} + \frac{n}{x-1}$

Sol: m=8, n=-5

Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones

Ecuaciones polinómicas, racionales e irracionales

18. Resolver las siguientes ecuaciones polinómicas:

a) $x + \frac{3(x-3)}{2} + \frac{2x}{3} - 2x = \frac{3(2x-1)}{9} - \frac{1}{6}$

b) $(3x-2)^2 = (2x+3)(2x-3) + 3(x+1)$

c) $(x^2-4)(2x-6)(x+3)=0$

d) $\frac{(x-1)^2}{2}-\frac{(1+2x)^2}{3}=-2-\frac{(2x-1)(2x+1)}{3}$

e) $(x+1)(x-2)(x^2-3x+4)=0$

f) $x^4-13x^2+36=0$

g) $x^4+21x^2-100=0$

h) $x^3-6x^2+11x-6=0$

i) $2x^4-x^3=x(7-6x)$

Sol: a) -8 b) 1 y 2 c) ±2 y ±3 d) 1 y 11/3 e) -1 y 2 f)±2 y ±3 g) ±2 h)1,2 y 3 i)0 y 1.

19. Resolver las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x+2}{x-1}-\frac{x+3}{x+1}=\frac{2x+2}{x^2-1}$

b) $\frac{5}{x+1}-\frac{3}{x+4}-\frac{3}{x^2+3x-4}=\frac{5}{x-1}$

c) $\frac{x-3}{x^2-x}-\frac{x+3}{x^2+x}=\frac{2-3x}{x^2-1}$

d) $\frac{1+\frac{x+1}{x-1}}{2-\frac{x-1}{x+1}}=2$

Sol: a) 3 b)0 c)2 d)3

20. Resolver las siguientes ecuaciones irracionales:

a) $2\sqrt{x}+1=\sqrt{x+9}$

b) $\sqrt{4x+5}-\sqrt{3x+1}=1$

c) $\sqrt[3]{x}-2\sqrt{x}=\sqrt{x}$

d) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{2x+1}=\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{x}}=\frac{6}{\sqrt{3x+4}}$

f) $\sqrt{2}+\sqrt{\frac{8}{x}}=\sqrt{2x}$

Sol: a)16 b)1 y 5 c)0 y 3 d)5/8 e)4 f)1 Y 4

Sistemas de ecuaciones lineales y no lineales

21. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales utilizando el método de Gauss cuando proceda:

a) $\left.\begin{array}{r}\frac{3(x-2)}{4}+\frac{2(y-3)}{5}=\frac{2}{5}\\ \frac{2(y-4)}{3}+\frac{3(x-1)}{2}=\frac{3}{2}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-2y+3z=13\\ -x+y+4z=9\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r}-2x+y+z=6\\ 3x-z=-7\\ x-5y+2z=7\end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r}x-9y+5z=33\\ x+3y-z=-9\\ x-y+z=5\end{array}\right\}$

Sol: a) x=2, y=4 b) x=2,y=-1, z=3 c)x=-1, y=0, z=4 d) SCI x=t, y$\frac{-7+t}{2}$, z=$\frac{3-t}{2}$

22. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

a) $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{x}+y=3\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r}\frac{x-2}{3}-\frac{y-4}{2}=1\\ \frac{2}{x-3}=\frac{4}{y-2}\end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{matrix} x^2+y^2=10 \\ x^2-y^2=8 \end{matrix}\right\}$ d) $\left.\begin{matrix} x-y=105 \\ \sqrt{x}+y=27 \end{matrix}\right\}$

Sol: a) x=1,y=2; x=2/5,y=1 b) x=7/2, y=3 c)x=3,y=1; x=-3,y=1; x=-3,y=1; x=-3,y=-1 d)x=121,y=16

Problemas utilizando ecuaciones y sistemas.

23. Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera. ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio?.
Sol: 74 litros.

24. Al aumentar en 1cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm^2, ¿cuánto mide la arista?.
Sol: 9cm

25. Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1€ menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja?.
Sol: 20 cajas a 5 €.

26. Un automovilista que se detiene a repostar observa que para llegar a su destino todavía le queda el triple de lo que ya ha recorrido. Además, se da cuenta de que, si recorre 10 km más, estará justo en la mitad del trayecto. ¿Cuántos km ha recorrido y cuál es la longitud del viaje?.
Sol: 10km, 40km.

27. El dueño de un bar ha comprado refrescos, cerveza y vino por importe de 500 € (sin impuestos). El valor del vino es 60 € menos que el de los refrescos y de la cerveza conjuntamente. Teniendo en cuenta que los refrescos deben pagar un IVA del 6%, por la cerveza del 12% y por El vino del 30%, lo que hace que la factura total con impuestos sea de 592.4 €, calcular la cantidad invertida en cada tipo de bebida.
Sol: 120€ en refrescos, 160€ en cerveza y 220€ en vino.

28. Un videoclub está especializado en películas de tres tipos: infantiles, oeste americano y terror. Se sabe que el 60% de las películas infantiles más el 50% de las del oeste representan el 30% del total de las películas. El 20% de las infantiles más el 60% de las del oeste más del 60% de las de terror al representan la mitad del total de las películas. Hay 100 películas más del oeste que de infantiles. Halla el número de películas de cada tipo.
Sol: 500 infantiles, 600 del oeste y 900 de terror.

Ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

29. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $5^{x^2+3x} = 625$
b) $2^{x+1} = 4^{2x-4}$
c) $10^{x-1} = 1$
d) $2^x = 3$
e) $2^{x-3} = 3^x$
f) $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^x = 60$
g) $4^x - 2^{x+2} = 32$
h) $11 \cdot 3^x - 9^x = 18$
i) $e^{2x} + 4e^x + 3 = 0$
j) $\sqrt[x]{a} = a^x$
k) $e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$

Sol: a) -4 y 1 b) 3 c)1 d) $log_2 3$ e) $log_{1,5}8$ f) 2 g) 3 h) 2 y log2/log3 i) No tiene j)1 k) 0 y ln4

30. Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:

a) $2logx - \log(x+6) = 3log2$
b) $\ln(x-3) + \ln(x+1) = ln3 + \ln(x-1)$
c) $\log(x+9) = 2 + logx$
d) $log\sqrt{3x+5} + log\sqrt{x} = 1$
e) $\log(2x+6) - 1 = 2\log(x-1)$
f) $logx^2 + logx^3 = 5$

Sol: a) 12 b) 5 c)1/11 d)5 e)2 y 1/5 f) 10

Sistemas de ecuaciones exponenciales y logarítmicas:

31. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones logarítmicos y exponenciales:

a) $\left.\begin{array}{r} 2^x + 5^y = 9 \\ 2^{x+1} - 5^{y+1} = -9 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{r} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^{x+y} = 128 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{r} \log_3 x + \log_3 y = 1 \\ x + y = 4 \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{r} \log_2 x + \log_2 y = 5 \\ \log_2 x^2 - \log_2 y = 3 \end{array}\right\}$

Sol: a) $x = 2;\ y = 1$ b) $\begin{array}{l} x_1 = 4;\ y_1 = 3 \\ x_2 = 3;\ y_2 = 4 \end{array}$ c) $\begin{array}{l} x_1 = 3;\ y_1 = 1 \\ x_2 = 1;\ y_2 = 3 \end{array}$ d) $x = 4;\ y = 2$

Inecuaciones.

32. Resolver las siguientes inecuaciones polinómicas:

a) $\frac{x}{3} - \frac{2x+5}{2} - \frac{3-2x}{6} > 0$
b) $\frac{x-1}{3} - \frac{x-4}{2} \leq \frac{x+4}{2} - 3$
c) $x^2 - 2x - 3 > 0$
d) $x^2 + 2x + 2 < 0$
e) $x(x^2-2) - (x+1)(x^2-1) > 4 - x^2$
f) $x^3 + x^2 - 9x - 9 \geq 0$
g) $x^2 - 4x \leq -4$

Sol: a)(-∞,-9) b) [4,∞) c)(-∞,-1)∪ (3,∞) d) No tiene e)R f) [-3,-1]∪ [3,∞) g)2

33. Resolver las siguientes inecuaciones racionales:

a) $\frac{3-x}{x-2} \geq 0$

b) $\frac{x+1}{x-2} - 2 \geq 0$

c) $\frac{x+2}{x^2} < 0$

d) $\frac{2x+2}{x-1} \geq 1$

e) $\frac{x^2-1}{x^2-4x+4} \geq 0$

f) $\frac{1}{x-1} > \frac{3}{x+1}$

Sol: a)(2,3] b)(2,5] c)(-∞,-2) d)(-∞,-3]∪(1,∞) e)(-∞,-1] ∪[1,2) ∪(2,∞) f)(-∞,-1) ∪(1,2)

34. Resolver los siguientes sistemas de inecuaciones:

a) $\begin{cases} 2-x > 0 \\ 1+x > 0 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1+x < 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{x}{2} \geq 1 \\ (x+1)^2 - x^2 \leq 1 \end{cases}$

Sol: a)(-1,2) b)No tiene c)[-∞,.6]

TRIGONOMETRÍA

Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera. Relaciones fundamentales de razones del mismo ángulo.

1. Calcula las razones trigonométricas de los siguientes ángulos relacionándolos con ángulos del primer cuadrante (sin utilizar calculadora): 120º, 135º, 150º, 180º, 210º, 225º, 240º, 270º, 300º, 315º, 330º, 360º.

2. Utilizando las relaciones fundamentales

$sen^2x + cos^2x = 1$	$tagx = \frac{senx}{cosx}$	$1 + tag^2x = \frac{1}{cos^2x}$

Calcular el resto de las razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes casos.

a) $sen\ \alpha = \frac{1}{2}$ y α en el segundo cuadrante.

b) $cos\ \alpha = -\frac{3}{4}$ y α en el tercer cuadrante.

c) $tag\ \alpha = \sqrt{3}$ y $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

d) $\sec\alpha = 2$ y $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\frac{sen\ x}{1+ctag^2x}$

b) $\frac{1+tag^2x}{1-ctag^2x}$

c) $sen^2\ x + sen^2\ x \cdot\ tag^2x$

d) $\frac{sen^3\ x+sen\ x\cdot cos^2x}{tag\ x}$

e) $\frac{sen^2x+cosec^2x}{cosec^2x}$

f) $\frac{cosec^2x- sen^2x}{ctag^2x}$

g) $\frac{\cos x+tag\ x}{\cos x\cdot tag\ x} - ctag\ x$

h) $sen\ x \cdot \sqrt{1 + ctag^2x}$

4. Comprobar las siguientes identidades:

a) $sec^2x + cosec^2x = sec^2x \cdot cosec^2x$

b) $\frac{\cos x+tag\ x}{\cos x\cdot tag\ x} = ctag\ x + secx$

c) $sen^2x = \frac{1}{1+ ctag^2x}$

d) $(sen\ x + \cos x)^2 = 1 + 2tagx \cdot cos^2x$

e) $cos^2x = \frac{ctag^2x}{1+ ctag^2x}$

f) $\frac{1+tag^2x}{ctag\ x} = \frac{tagx}{cos^2x}$

Razones trigonométricas de la suma, diferencia, ángulo doble y ángulo mitad. Transformación de suma de dos razones trigonométricas en productos.

5. Siendo α un ángulo agudo (un ángulo del primer cuadrante), escribe en función de una razón trigonométrica del ángulo α, las siguientes razones trigonométricas.

a) $sen(\alpha + \pi)$

b) $\cos\ (\alpha - \pi)$

c) $\cos(-\alpha)$

d) $sen\ (\alpha + \frac{\pi}{2})$

e) $\cos(\alpha + 2\pi)$
f) $sen(\frac{\pi}{2} - \alpha)$
g) $tag(\alpha - 2\pi)$
h) $sen(\alpha + 7\pi)$
i) $\cos(\alpha + \frac{3\pi}{2})$

6. Simplificar las siguientes expresiones trigonométricas:

a) $\frac{sen\ 2a}{1-cos^2 a} \cdot \frac{1+\cos a}{\cos a}$

b) $\frac{sen\ 2a+sen\ 4a}{\cos 2a-\cos 4a}$

7. Demuestra las siguientes igualdades:

a) $\frac{\cos(2a-b)-\cos(2a+b)}{sen(2a+b)+sen\ (2a-b)} = tg\ b$

b) $sen\ ^2x = 4sen^2 \frac{x}{2}\ cos^2 \frac{x}{2}$

c) $\frac{2\ sen\ x}{tg\ 2x} = cosx - \frac{sen\ ^2x}{\cos x}$

ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS.

8. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen\ x = -\frac{1}{2}$

b) $\cos x = 0$

c) $tag\ x = -1$

d) $sen\ 2x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) $1 + \cos x = 2$

f) $tag\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

g) $sen(x + 180°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

h) $1 + \cos 2x = 0$

9. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $sen\ x = tg\ x$

b) $6cos^2x + 9cosx = 6$

c) $sen\ 2x - 2cos^2x = 0$

d) $\cos 2x + 3\ sen\ x = 2$

e) $6cos^2 \frac{x}{2} + \cos x = 1$

f) $\cos 2x - \cos 6x = sen\ 5x + sen\ 3x$

g) $sen\ (\pi - x) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos x$

Resolución de triángulos. Teorema del seno y el coseno.

10. Para conocer la altura de un árbol, Pedro se sitúa a 12 metros del árbol y observa que el ángulo de visión del árbol es de 32º. ¿Cómo puede Pedro calcular la altura del árbol? ¿Cuánto mide el árbol?

11. Calcular los lados de un rombo del que sabemos que la diagonal mayor mide 24 cm y el ángulo mayor 120º.

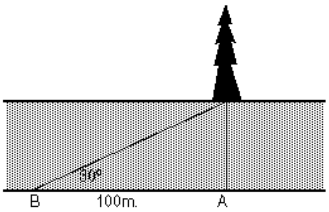
12. En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m. ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de la misma?.

13. El mástil mayor de un barco está sujeto a proa y a popa por un cable que forma con la proa un ángulo de 55º y con la popa un ángulo de 45º. Si el barco mide 12 m de longitud. ¿Cuál es la altura del mástil? ¿Qué longitud total tiene el cable que lo sujeta?

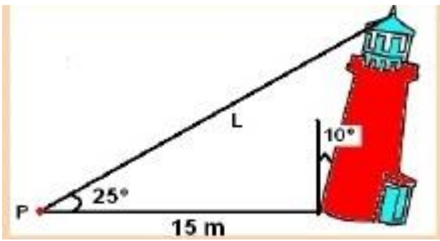
14. ¿A qué altura vuela un avión si las visuales de dos observadores separados entre sí una distancia de 700 metros forman ángulos de 70º y 80º respectivamente?.

15. Calcular la superficie de un triángulo del que conocemos dos lados b = 100 cm y c = 250 cm y el ángulo comprendido entre ambos A = 20º.

16. Desde un punto A en la orilla de un río se ve un árbol justo enfrente. Si caminamos 100 metros río abajo, por la orilla recta del río, llegamos a un punto B desde el que se ve el pino formando un ángulo de 30º con nuestra orilla. Calcular la anchura del río.



17. Una torre inclinada 10º respecto de la vertical, está sujeta por un cable desde un punto P a 15 metros de la base de la torre. Si el ángulo de elevación del cable es de 25º, calcula la longitud del cable y la altura de la torre.



24. Un árbol es observado desde dos puntos opuestos separados 250 metros con ángulos de elevación de 30º y 25º. ¿Cuál es la altura del árbol y a qué distancia está de la cúspide de cada punto de observación?.

GEOMETRÍA

RESUMEN TEORICO:

- *Vector* de origen $A(x_1, y_1)$ y extremo $B(x_2, y_2)$: $\boxed{\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)}$

- *Módulo y pendiente de un vector* $\vec{v} = (v_1, v_2)$:
$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$
$$m = \frac{v_2}{v_1}$$

- *Suma de dos vectores* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$: $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)}$

- *Producto de un vector* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ *por un número* λ: $\boxed{\overrightarrow{\lambda u} = (\lambda u_1, \lambda u_2)}$

- *Producto escalar de dos vectores* $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$:
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\phi$$
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

- *Consecuencias del producto escalar:*

1ª) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2ª) $Si \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

- *Dos vectores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$ *son ortonormales si:*

1ª) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

2ª) $|\vec{u}| = |\vec{v}| = 1$

- *Distancia entre dos puntos* $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$: $\boxed{d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$

- *Punto medio de un segmento de extremos* $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$:

$$\boxed{P_m(A, B) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)}$$

- *Ecuaciones de la recta que pasa por el punto* $P_r = (x_0, y_0)$ *y tiene vector director* $\vec{v}(v_1, v_2)$:
  - *Ecuación vectorial*: $\boxed{(x, y) = (x_0, y_0) + t(v_1, v_2)}$
  - *Ecuaciones paramétricas*:
  $$\begin{aligned} x &= x_0 + t \cdot v_1 \\ y &= y_0 + t \cdot v_2 \end{aligned}$$
  - *Ecuación continua:*
  $$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2}$$

- *Ecuación general :* $\boxed{Ax+By+C=0}$

Conocida la ecuación general de la recta podemos obtener su vector director $\vec{v}_r = (-B, A)$ y un punto dando un valor a una de las coordenadas y despejando la otra en la ecuación.

- *Ecuación explicita:* $\boxed{y = mx + b}$

m es la pendiente de la recta y b la ordenada en el origen de la recta. Conocida la ecuación explicita de la recta podemos obtener su vector director $\vec{v}_r = (1, m)$ ya que $m = \frac{v_2}{v_1}$ y un punto $P_r(0, b)$.

- *Ecuación punto-pendiente:* $\boxed{y - y_0 = m \cdot (x - x_0)}$

- *El punto de corte de dos rectas* $r \equiv A_1x + B_1y + C_1 = 0$ *y* $s \equiv A_2x + B_2y + C_2 = 0$, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}\right\}} \Rightarrow$$

Sistema tiene una solución	→ rectas secantes
Sistema no tiene solución	→ rectas paralelas $r \parallel s$
Sistema tiene infinitas soluciones	→ rectas coincidentes $r \equiv s$

- *Condiciones de paralelismo y perpendicularidad*

a) Dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ son paralelos ($\vec{u} \parallel \vec{v}$) si: $\boxed{\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}}$

b) Dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v}(v_1, v_2)$ son perpendiculares ($\vec{u} \perp \vec{v}$) si: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

c) Dado un vector $\vec{u} = (u_1, u_2)$, se tiene que el vector $\vec{n}_{\vec{u}} = (-u_2, u_1)$ es perpendicular al vector dado.

d) Rectas paralelas: $\boxed{\begin{array}{c} \vec{v}_r \parallel \vec{v}_s \\ m_r = m_s \end{array}}$

Dada una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$, una recta paralela a la anterior tendrá ecuación $Ax + By + D = 0$, para determinarla bastara imponer alguna condición que permita obtener D.

e) Rectas perpendiculares: $\boxed{\begin{array}{c} \vec{v}_r \perp \vec{v}_s \\ m_r \cdot m_s = 1 \end{array}}$

Dada una recta de ecuación $Ax + By + C = 0$, una recta perpendicular a la anterior tendrá ecuación $-Bx + Ay + D = 0$, para determinarla bastara imponer alguna condición que permita obtener D.

- *Distancia de un punto* $P=(x_0,y_0)$ *a una recta* $r\equiv Ax+By+C=0$*:*

$$\boxed{d(P,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}}$$

- *Distancia entre dos rectas paralelas:* $\boxed{d(r,s)=d(P_r,s)}$
- *Ángulo formado por dos vectores* $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\boxed{\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}}$
- *Ángulo formado por dos rectas r y s*: $\boxed{\cos\alpha=\frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v}_r|\cdot|\vec{v}_s|}}$

VECTORES.

1. Dados los vectores $\vec{v}(1{,}5)$, $\vec{w}(-3{,}4)$ y $\vec{u}(5{,}12)$, halla:

a) $|\vec{v}|$, $|\vec{w}|\ y\ |\vec{u}|$
b) El ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$
c) Un vector normal a $\vec{w}$
d) Un vector paralelo a $\vec{v}$
e) $\vec{u}+2\vec{v}-\vec{w}$ analíticamente
f) $\vec{u}-\vec{v}$ analítica y gráficamente
g) $\vec{u}\cdot\vec{v}$

2. Calcula las coordenadas, el módulo del vector de origen el punto A(2,-2) y extremo el punto B(-1,2).

3. Un vector tiene su origen en el punto A(1,-4) y sus coordenadas son (3,2). Halla las coordenadas de su extremo.

4. Calcula dos vectores perpendiculares al vector $\vec{v}$ (4,-3).

5. Sean los vectores $\vec{v}(3,x)$ y $\vec{w}(y,5)$. Calcula x e y de manera que sean perpendiculares y $|\vec{w}|=13$.

PUNTO MEDIO. DIVIDIR UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

6. Un segmento tiene por extremos A(3,5) y B(8,6), calcula:

a) Su punto medio.
b) Las coordenadas de los puntos que lo dividen en tres partes iguales.

ECUACIONES DE RECTAS. DETERMINACIÓN DE UNA RECTA. POSICIONES RELATIVA DE DOS RECTAS.

7. Escribe en todas sus formas la ecuación de la recta que pasa por el punto A(-5,0) y cuyo vector director es (4,-3). ¿Pertenece a la recta el punto B(0,2)?

8. Dada la recta 2x-7y = 0, indica un vector director, un punto por el que pasa y su pendiente.

9. Hallar la ecuación explicita de la recta que pasa por los puntos A(1,3) y B(5,-2). Dar su pendiente y la ordenada en el origen.

10. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$, expresar su ecuación en forma continua, general, explicita y vectorial.

11. Halla el punto intersección de las rectas 6x-9y=0 y 4x-6y+5=0.

12. Halla la ecuación de la recta cuya pendiente es -3 y pasa por el punto de intersección de las rectas r≡2x-3y-5=0 y s≡-x+2y+3=0.

13. Estudia la posición relativa de cada uno de los siguientes pares de rectas:

a) r: 2x-y+5=0 s: $\frac{x}{-1} = \frac{y-2}{1}$

b) r: x+2y+2=0 s: $\frac{x+1}{4} = \frac{y-1}{-2}$

c) r: $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ s: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{-5}$

d) r: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y+2}{-3}$ s: $3x + y = 0$

e) r:$x - y + 2 = 0$ s:x-2y+3=0

14. Dada la recta $r \equiv 2x - y + 4 = 0$ y el punto P(2,-1), se pide:

a) Ecuación de la recta paralela a r pasando por P.

b) Ecuación de la recta perpendicular a r pasando por P.

15. Halla m para que las rectas 2x+3y+15=0 y mx-y+7=0 :

a) Sean paralelas.

b) Sean perpendiculares.

c) Se corten en el punto P(0,-5).

16. Dadas las rectas r: $x - 2y + 1 = 0$ y s: $\frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{2}$. Halla el valor de a en cada caso para que:

a) Las rectas sean paralelas.

b) Las rectas sean perpendiculares.

c) Las rectas sean secantes pero no perpendiculares.

d) La segunda recta pase por P(-1,3).

DISTANCIAS- ÁNGULOS

17. Halla el perímetro del triángulo de vértices A(5,3),B(6,2) y C(3,-1).

18. Halla la distancia del punto (-2,0) a la recta 3x+2y-3=0.

19. Halla la distancia entre las rectas r≡3x+2y-1=0 y s≡$\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-3}$.

20. Halla el ángulo que forman las rectas r: $x+y-3=0$ y s: $2x-y=0$.

21. Halla el área del triángulo de vértices A(5,3),B(6,2) y C(3,-1).

PUNTO SIMETRICO

22. Halla las coordenadas del punto simétrico de P(1,-2) respecto de A(3,4).

23. Halla las coordenadas del punto simétrico de P(1,-2) respecto de la recta 3x-4y=0.

MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

24. Halla la mediatriz del segmento de extremos los puntos A(3,-4) y B(2,-1).

25. Halla el punto de la recta 3x-4y+8 =0 que equidista de A(-6,0) y B(0,-6).

26. La recta 2x+y-4 es la mediatriz de un segmento que tiene un extremo en el punto (0,0). Halla las coordenadas del otro extremo.

TRIÁNGULOS Y CUADRILATEROS

27. Calcula el área del triángulo cuyos lados están sobre las rectas r: x=3, s: 2x+3y-6=0 y t: x-y-7=0.

28. Los puntos P(-2,4) y Q(6,0) son vértices consecutivos de un paralelogramo que tiene el centro en el origen de coordenadas. Halla los otros dos vértices y los ángulos del paralelogramo.

29. Dos de los lados de un paralelogramo están sobre las rectas x+y-2=0 y x-2y+4=0, uno de sus vértices es el punto (6,0). Halla los otros vértices.

30. Un rombo ABCD tiene un vértice en el eje de ordenadas, otros dos vértices opuestos son B(3,1) y D(-5,-3). Halla las coordenadas de los vértices A y C y el área del rombo.

31. El lado desigual del triángulo isósceles ABC tiene por extremos A(1,-2) y B(4,3). El vértice C está en la recta 3x-y+8=0. Halla las coordenadas de C y el área del triángulo.

32. De un cuadrado conocemos dos vértices contiguos A(3,1) y B(4,5). Calcula los otros vértices. ¿Cuántas soluciones hay?.

33. Los puntos A(-2,-2) y B(3,2) son los vértices de un triángulo rectángulo en A. Determina el tercer vértice que está situado sobre la recta x+y-1=0.

34. Un rombo tiene una diagonal sobre la recta x-2y+2=0 y uno de sus vértices es el punto A(2,7). Halla los demás vértices si el perímetro del rombo es 20 cm.

35. Determina la ecuación de una de pendiente -2 que forma con los ejes coordenados un triángulo de área igual a 81. ¿Cuántas soluciones hay?.